17/05/16

$\bar{f}: U \to \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^n$ δ/κό πεδίο.

$\bar{f}$ πεδίο κλίσεων $\Leftrightarrow \exists \varphi: U \to \mathbb{R}$, $\nabla\varphi = \bar{f}$

Αν $\bar{\gamma}: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ κατά τμ. C^1 καμπύλη και $\nabla\varphi = \bar{f}$ συνεχής ⇒

$$\boxed{\int_{\bar{\gamma}} \bar{f}(\bar{y}) \cdot d\bar{y} = \varphi(\bar{x}) - \varphi(\bar{\alpha})}, \text{ αν } \bar{\gamma}(\alpha) = \alpha, \ \bar{\gamma}(\beta) = \bar{x}$$

$$\bar{f} \in C^1(U, \mathbb{R}^n) \underset{\text{αναγκαία}}{\overset{\text{π.κλ.}}{\Rightarrow}} D\bar{f} = H\varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\varphi & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_1}\varphi \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_n}\varphi & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\varphi \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ συμμετρικός}$$

και αν επιπλέον

U: αστερόμορφο $\underset{\text{ικανή}}{\Rightarrow}$ $\bar{f}$ είναι πεδίο κλίσεων

Συμπλήρωση/Άσκηση ①: $\bar f : U \to \mathbb{R}^n$ συνεχής, ανοικτό $U \subset \mathbb{R}^n$, $\bar x \in U \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underbrace{\max_{t\in[0,1]} \|\bar f(\bar x + t\bar \eta) - \bar f(\bar x)\|}_{g(\bar\eta)} \xrightarrow[\bar\eta \to \bar 0]{} 0$$

Θνδο: $g(\bar\eta) \xrightarrow[\bar\eta\to\bar 0]{} 0 \iff \forall \varepsilon>0,\ \exists \delta>0,\ \forall \bar\eta \in B(0,\delta) : g(\bar\eta) < \varepsilon.$

[όπου $\bar x \in U$, U: ανοικτό $\Rightarrow \exists r>0 : \underbrace{\bar x + B(0,r)}_{B(\bar x, r)} \subset U$]

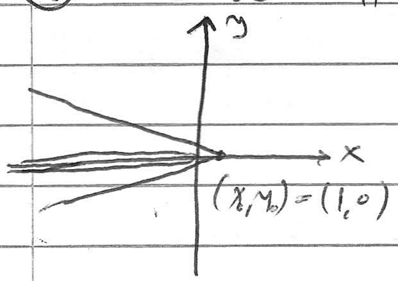
Έχουμε ότι (*) $(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta \in (0,r)) : \forall \bar y \in B(0,\delta) : \|\bar f(\bar x + \bar y) - \bar f(\bar x)\| < \varepsilon \iff \lim_{\bar y \to \bar 0} \bar f(\bar x + \bar y) = \bar f(\bar x)$

Επίσης έχουμε αν $\bar\eta \in B(0,\delta) \Rightarrow t\bar\eta \in B(0,\delta)\ \forall t \in [0,1]$

Άρα από (*) $\Rightarrow (\forall\varepsilon>0)(\exists\delta\in(0,r))\ \forall\bar\eta\in B(0,\delta)\ \forall t\in[0,1] : \|\bar f(\bar x + t\bar\eta) - \bar f(\bar x)\| < \varepsilon$

$\Rightarrow (\forall \varepsilon>0)(\exists\delta\in(0,r))\ \forall \bar\eta \in B(0,r) : \max_{t\in[0,1]} \|\bar f(\bar x + t\bar\eta) - \bar f(\bar x)\| < \varepsilon$

② Το σύνολο $\mathbb{R}^2 \setminus ((-\infty, 0] \times \{0\})$ είναι αστρόμορφο



Πράγματι για $(x_0,y_0) = (1,0)$. Έστω $x<0$, $y \neq 0$

Τότε $(x_0,y_0) + t((x,y) - (x_0,y_0)) \neq 0,\ \forall t \in [0,1]$

[αφού $f(t) = \|(1,0) + t(x-1, y)\| =$

$= \|(1 + t(x-1), ty)\| \geq t|y| > 0\ \forall t \in [0,1],\ y \neq 0$

Παράδειγμα (Συμβουλή/Άποψη/Γνώμη): Αν έχω δικό πεδίο και έχω την υποψία ότι είναι πεδίο κλίσεων, ίσως ο πιο απλός τρόπος να το δείξω αυτό αλλά και να έχω το δυναμικό είναι να προσπαθήσω να βρω ένα τέτοιο δυναμικό.

Πχ: $\bar f(x,y,z) = \dfrac{(x,y,z)}{\|(x,y,z)\|^k}$, $k \in \mathbb{N}$, $(x,y,z) = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$

Ψάχνω $\varphi : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}$ με $\nabla\varphi = \bar f$ $\iff$

$\iff \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = \dfrac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{k/2}}$, $\partial\varphi/\partial y = \dfrac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{k/2}}$, $\partial\varphi/\partial z = \dfrac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{k/2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi(x,y,z) = \displaystyle\int \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{k/2}} dx + c(y,z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{-\frac{k}{2}+1} (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{k}{2}+1} + c(y,z) \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = \dfrac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{k/2}} + \overbrace{\dfrac{\partial}{\partial y} c(y,z)}^{=0} \Rightarrow c(y,z) = d(z) \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{\partial\varphi}{\partial z} = \dfrac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{k/2}} + \underbrace{d'(z)}_{=0} \Rightarrow d(z) = c \in \mathbb{R}$ $\rightarrow$

$$\Rightarrow \varphi(x,y,z) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{-\frac{k}{2}+1}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{k}{2}} + c \;,\; c\in\mathbb{R},\; k\neq 2$$

<u>Άσκηση</u>: Υπολ. το επικ. ολ/μα: $\int_{\bar{\gamma}} \underbrace{(x^2+5y+3yz,\; 5x+3xz-2,\; 3xy-4z)}_{\bar{f}(x,y,z)} \cdot d(x,y,z)$

$\bar{\gamma}(t) = (\sin t, \cos t, t),\; t\in[0,2\pi]$, $\bar{f}\in C^\infty(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$

<u>Λύση</u>: $\bar{\gamma}(0) = (0,1,0)$, $\bar{\gamma}(2\pi) = (0,1,2\pi)$

$$\int_{\bar{\gamma}} \bar{f}(x,y,z)\cdot d(x,y,z) = \int_0^{2\pi} \bar{f}(\bar{\gamma}(t))\cdot \underbrace{\bar{\gamma}'(t)}_{=\begin{pmatrix}\cos t\\ -\sin t\\ 1\end{pmatrix}} dt \overset{(*)}{=}$$

Είναι: $\int_0^{2\pi} \sin t\, dt = 0$, $\int_0^{2\pi} \cos t\, dt = 0$

$$\bar{f}(\bar{\gamma}(t)) = \begin{pmatrix} \sin^2 t + 5\cos t + 3t\cos t \\ 5\sin t + 3\sin t\cdot t - 2 \\ 3\cos t\sin t - 4t \end{pmatrix}$$

$$\overset{(*)}{=} \int_0^{2\pi} \Big[(\sin^2 t + 5\cos t + 3t\cos t)\cos t - (5\sin t + 3t\sin t - 2)\sin t + 3\sin t\cos t - 4t\Big]dt$$

(Άσκ: Είναι το f πεδίο κλίσεων; το $\mathbb{R}^3$: είναι αστρόμορφο. Ποιο είναι το φ με $\nabla\varphi = \bar{f}$;)

<u>Θεώρημα (Green)</u>: "Συνδέω" επικ. ολ/μα δίσκου πεδίου με πολλαπλό ολ/μα

(*) Μόνο για τις 2 διαστάσεις!!!!

—//— $\boxed{n=3}$ (Stokes) —//— επιφ. ολ/μα —//— —//— επικ. ολ/μα δ.π.

—//— (Gauss) —//— —//— —//— με πολλαπλό ολ/μα ~~επιφ. ολ/μα δ.π.~~

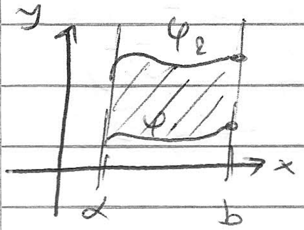
[Όλα αυτά προέρχονται από το γενικό Θεωρ. Stokes το οποίο αναφέρεται σε "Διαφορίσιμες Πολλαπλότητες" και σχετίζεται με "Διαφορικές Μορφές"].

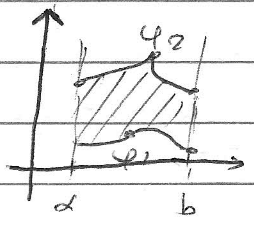
Σχετίζεται επίσης με την ολοκλ. κατά παράγοντες σε ολ/μα μιας μεταβλητής: $\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$

δηλ. υπάρχει συσχέτιση μεταξύ ολ/ων κ' τιμών στα άκρα του πεδίου ολοκλ.

Ορισμός: Μία συνάρτηση $\varphi : [\alpha, b] \to \mathbb{R}$ ονομάζεται κατά τμήματα συνεχώς διαφ. (ή κ.τμ. C^1) αν $\exists P = \{\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = b\}$ ώστε $\varphi|_{[t_{i-1}, t_i]} : C^1$, $\forall i = 1, \ldots, k$

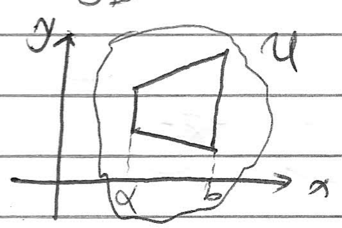
Ορισμός: Ένα κανονικό χωρίο ως προς τον Ox:
$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \alpha \le x \le b,\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\},$$ όπου $\varphi_1, \varphi_2 : [\alpha, b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς με $\varphi_1(x) \le \varphi_2(x)\ \forall x$, ονομάζεται κ.τμ. C^1 καν. χωρίο ως προς τον άξονα Ox, αν φ_1, φ_2 κ.τμ. C^1-συναρτήσεις.





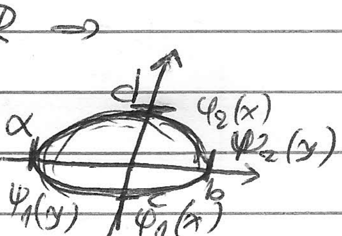
Αντίστοιχα για τον Oy, και για C^1 καν. χωρία ως προς τους 2 άξονες.

Θεώρημα Green: Έστω $D \subset \mathbb{R}^2$ ένα κατά τμ. C^1 κανονικό χωρίο (ως προς Ox, Oy) και ∂D το θετικά προσανατολισμένο σύνορό του. Έστω $U \subset \mathbb{R}^2$ ανοικτό με $D \subset U$ και $(f_1, f_2) : U \to \mathbb{R}^2$ συνεχώς διαφορίσιμο. Τότε:
$$\int_{\partial D} (f_1, f_2)(x,y) \cdot d(x,y) = \iint_D \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)(x,y)\, d(x,y)$$



Απόδειξη: Γνωρίζουμε ότι D: J-μετρήσιμο σύνολο (ως κανονικό χωρίο ως προς Ox)
[$\varphi_1, \varphi_2 : [\alpha, b] \to \mathbb{R}$ ~~...~~ συνεχείς $\Rightarrow$ έχουν γραφήματα $\{(t, \varphi_i(t)) : t \in [\alpha, b],\ i = 1, 2\} \subset \mathbb{R}^2$ μηδενικού περιεχομένου] $\Rightarrow I = \iint_D \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right) d(x,y) \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$\xrightarrow[\text{D: καν. χωρίο}]{\text{διπλό ολ/μα}}$ $$I = \underbrace{\iint_D \frac{\partial f_2}{\partial x}\, d(x,y)}_{= \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y)\, dx\, dy} - \underbrace{\iint_D \frac{\partial f_1}{\partial y}\, d(x,y)}_{= \int_\alpha^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \partial f_1/\partial y\,(x,y)\, dy\, dx} \to$$

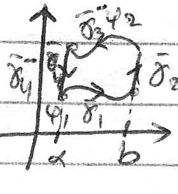


όπου $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [\alpha, b],\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\} =$
$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [c, d],\ \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)\}$

Θ.Θ. Α.Λ. $\Rightarrow I = \int_c^d \big(f_2(\psi_2(y), y) - f_2(\psi_1(y), y)\big)\, dy - \int_\alpha^b \big(f_1(x, \varphi_2(x)) - f_1(x, \varphi_2(x))\big)\, dx$

Από την άλλη $J=\int_{\partial D}(f_1,f_2)(x,y)\cdot d(x,y)$

Αν δούμε το D ως κανον. χωρίο ως προς Ox μπορούμε να δούμε την θετικά προσ/νη καμπύλη $\bar\gamma:[t_1,t_2]\to\mathbb{R}^2$ με $\bar\gamma([t_1,t_2])=\partial D$



$\bar\gamma_1(t)=(t,\varphi_1(t))$ $t\in[a,b]\Rightarrow\bar\gamma_1'(t)=(1,\varphi_1'(t))$

$\bar\gamma_2(t)=(b,\varphi_1(t))+t((b,\varphi_2(b))-$ $t\in[\alpha,b]$

$-(b,\varphi_1(b)))$, $t\in[0,1]\Rightarrow$

$\Rightarrow\bar\gamma_2(t)=(b,\varphi_1(t))+t(0,\varphi_2(b)-\varphi_1(b))$, $t\in[0,1]$

$\bar\gamma_3(t)=(t,\varphi_2(t))$, $t\in[a,b]$ (αλλά παίρνω το $\bar\gamma_3^-$)

$\bar\gamma_4(t)=(\alpha,\varphi_1(\alpha))+t(0,\varphi_2(\alpha)-\varphi_1(\alpha))$, $t\in[0,1]$.

Άρα $\bar\gamma=\bar\gamma_1\oplus\bar\gamma_2\oplus\bar\gamma_3^-\oplus\bar\gamma_4^-$

Άρα $J=\int_{\bar\gamma}(f_1,f_2)(x,y)\cdot d(x,y)=\int_{\bar\gamma_1}(f_1,f_2)(x,y)\cdot d(x,y)+\int_{\bar\gamma_2}()+\int_{\bar\gamma_3^-}()+\int_{\bar\gamma_4^-}()=$

Όμως $J=J_1+J_2\overset{\substack{\text{ιδιότ.}\\\text{επικ.}\\\text{ολοκλ.}}}{=}\overbrace{\int_{\bar\gamma}(f_1,0)\cdot d(x,y)}^{J_1}+\overbrace{\int_{\bar\gamma}(0,f_2)\cdot d(x,y)}^{J_2}$

$$\begin{pmatrix}f_1\\f_2\end{pmatrix}(x,y)=\begin{pmatrix}f_1(x,y)\\f_2(x,y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_1(x,y)\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\f_2(x,y)\end{pmatrix}$$

$$J_1=\int_{\bar\gamma}(f_1,0)\cdot d(x,y)=\int_{\bar\gamma_1}()+\int_{\bar\gamma_2}()+\underbrace{\int_{\bar\gamma_3^-}()}_{-\int_{\bar\gamma_3}()}+\underbrace{\int_{\bar\gamma_4^-}()}_{-\int_{\bar\gamma_4}()}=$$

$$=\int_{\alpha_i}^{b_i}\underbrace{f_1(\gamma_i(t),0)}_{\in\mathbb{R}^2}\cdot\underbrace{\gamma_i'(t)}_{\in\mathbb{R}^2}dt,\quad\forall i=1,\dots,4\Rightarrow$$

$$\Rightarrow J_1=\int_\alpha^b f_1(t,\varphi_1(t))dt-\int_\alpha^b f_1(t,\varphi_2(t))dt$$